Vektör Sistemleri için Elementer İşlemler

V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ de V de bir vektör sistemi olsun.

Aşağıdaki işlemlerden herbirine bu vektör sistemi için bir "elementer işlem" yada "elementer operasyon" denir

1) $c \neq 0$, $c \in \mathcal{F}$ olmak üzere α_i vektörünü c ile çarpmak $(1 \leq i \leq n)$. Buna 1. tipten elementer işlem denir.

2) $c \neq 0$, $c \in \mathcal{F}$ olsun. α_j vektörünü c ile çarpmak ve α_i vektörüne eklemek. Buna 2. tipten elementer işlemdenir.

3) Herhangi iki vektörü kendi aralarında yer değiştirmek Buna 3. tipten elementer işlem denir.

Elementer işlemler genellikle ε ile gösterilir.

Eğer ε 1. tipten elementer işlem ise $\varepsilon : \alpha_i \to c\alpha_i$

2. " " $\varepsilon : \alpha_i \to \alpha_i + c\alpha_j$

3. " " " $\varepsilon : \alpha_i \to \alpha_j$

<u>Tanım</u>: Bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ sistemine sonlu sayıda elementer işlem uygulanarak $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ sistemi elde ediliyorsa bu iki sisteme denktirler, denir.

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \approx \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ ile gösterilir.

<u>Örnek</u>: $\mathbb{R}^3$ de $\{\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)\}$ verilsin. Sonlu sayıda elementer işlem uygulayalım.

$\varepsilon_1 : \alpha_1 \to 2\alpha_1$ $\quad \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \overset{\varepsilon_1}{\approx} \{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\varepsilon_2 : \alpha_2 \to \alpha_2 + (-2)\alpha_3$ $\quad \overset{\varepsilon_2}{\approx} \{\underset{\beta_1}{(2,0,0)}, \underset{\beta_2}{(0,1,-2)}, \underset{\beta_3}{(0,0,1)}\}$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \approx \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

Teorem: $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n\} \approx \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \Leftrightarrow Sp\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = Sp\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$

"Elemanter işlemlerin Tersleri"

1) $\mathcal{E}$, 1. çeşit elemanter işlem olsun. Yani

$$\mathcal{E}: \alpha_i \longrightarrow c\alpha_i \quad , c \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \mathcal{E}^{-1} = ?$$

$$\underbrace{\alpha_i \xrightarrow{\mathcal{E}} c\alpha_i \xrightarrow{\mathcal{E}^{-1}} \frac{1}{c}(c\alpha_i)}_{\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}^{-1} = I}$$

$$\mathcal{E}^{-1}: \alpha_i \longrightarrow \frac{1}{c}\alpha_i$$

2) $\mathcal{E}$ 2 tipten elemanter işlem olsun. Yani $\mathcal{E}: \alpha_i \to \alpha_i + c\alpha_j$ olsun. $\mathcal{E}^{-1} = ?$

$$\underbrace{\alpha_i \xrightarrow{\mathcal{E}} \alpha_i + c\alpha_j \xrightarrow{\mathcal{E}^{-1}} (\alpha_i + c\alpha_j) - c\alpha_j}_{\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}^{-1} = I}$$

$$\mathcal{E}^{-1}: \alpha_i \longrightarrow \alpha_i - c\alpha_j$$

3) $\mathcal{E}$ 3. tipten elemanter işlem olsun. $\mathcal{E}: \alpha_i \longleftrightarrow \alpha_j$ ise

$\mathcal{E}^{-1}: \alpha_i \longleftrightarrow \alpha_j$ dir.

örn: $\mathcal{E}: \alpha_2 \to \frac{1}{7}\alpha_2 \quad \Rightarrow \mathcal{E}^{-1}: \alpha_2 \to 7\alpha_2$ dir.

Matrisler için Elemanter İşlemler

Tanım:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{array}{l} \text{--- } \alpha_1 \\ \text{--- } \alpha_2 \\ \\ \text{--- } \alpha_m \end{array}$$

matrisinin satırlarını $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m\}$ ile gösterelim

Bu vektör sistemine uygulanan elemanter işlemlere elemanter satır işlemleri denir.

Tanım: $A, B \in \mathcal{F}^m_n$ matrisleri için birine sonlu sayıda elemanter satır işlemi uygulanarak diğeri elde ediliyorsa A ve B ye satırca denk matrisler denir ve $A \approx B$ ile gösterilir.

Örnek:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{--- } \alpha_1 \\ \text{--- } \alpha_2 \\ \text{--- } \alpha_3 \end{array} \end{array}$$

$\varepsilon_1 : \alpha_1 \to 2\alpha_1$ $\quad \varepsilon_1(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B \quad A \approx B$

olduğu gibi

$\varepsilon_2 : \alpha_1 \to \alpha_1 + (-2)\alpha_3$ $\quad \varepsilon_2(B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = C$

$A \approx C$ dir.

Tanım (Bir matrisin Rankı): $A \in \mathcal{F}^m_n$ matrisinin satırları $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ olsun. Satır vektörlerinin gerdiği uzaya yani $Sp\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ uzayına A nın satır uzayı denir. O halde satır uzayı

$$A = Sp\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m\} \text{ dir.}$$

Bu uzayın boyutuna A matrisinin satır rankı denir. satırrankA ile gösterilir. satırrank$A = $ boy$Sp\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$

Bir vektör uzayının boyutu uzayı geren vektörler içerisinden enfazla kaçı lineer bağımsız ise o sayıya eşitti. O halde A matrisinin satır rankı $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$

vektör sisteminde en fazla kaç vektör lineer bağımsız ise o sayıya eşittir.

Sonuç: A matrisinin rankı A nın satır uzayının boyutuna eşittir.

$$\text{rank}\, A = \text{boy}(\text{satır uzay}\, A)$$

Teorem: $A \approx B \Rightarrow \text{rank}\, A = \text{rank}\, B$ dir.

Bu teoremin tersi doğru değildir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times4}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rank}\, A = \text{rank}\, B = 3$ dür. Fakat denk değildirler.

Tanım (Satır Eşelon Matris): Aşağıdaki özellikleri sağlayan A matrisine satır eşelon matris denir

1) Her satırda sıfırdan farklı ilk bileşen 1 dir

2) Ardışık iki satır için 2. satır ya hep sıfırdır ya da 2. satırın sıfırdan farklı ilk bileşeni 1. satırın sıfırdan farklı ilk bileşeninin sağındadır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ satır eşelon matrislerdir.

Tanım (Satırca İndirgenmiş Eşelon matris):

Aşağıdaki özellikleri sağlayan A matrisine satırca indirgenmiş eşelon matris denir, ve R ile gösterilir.

Her satırda sıfırdan farklı ilk bileşen 1 ve 1in bulunduğu sütunun diğer tüm elemanları sıfırdır.

Ardışık iki satır için satır ya hep sıfırdır yada ikinci satırın sıfırdan farklı ilk bileşeni ilk satırın sıfırdan farklı ilk bileşeninin sağındadır.

Ör:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satırca indirgenmiş eşelon matrislerdir.

NOT: Bir A matrisi satırca indirgenmiş bir R eşelon matrisine denktir. Yani $A \sim R$ dir.

Ayrıca $A \sim R \Rightarrow \text{rank}A = \text{rank}R$ dir.

Elementer Satır İşlemlerinin Kullanım Alanları

1) Matrisin Rankını Bulma: Bir A matrisinin rankını bulmak için A ya elementer işlemler uygulayarak R satırca indirgenmiş eşelon matris bulunur. R nin sıfırdan farklı satır sayısı rank R yi verir.

$\text{rank}A = \text{rank}R$ den rank A bulunur.

Örnek!

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

rank A = ?

(en fazla 3 olabilir.)

$$A \overset{E_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -10 \end{bmatrix} \overset{E_2:\, d_3 \to d_3 - d_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{E_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{E_4}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -13 & -26 \end{bmatrix}$$

$$\overset{E_5}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{E_6}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = R$$

rank $R = 3 \Rightarrow$ rank $A = 3$.

Örnek:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}_{4\times 5}$$

rank $A = ?$

(rankı en fazla 4 dür.)

önce R yi bulalım.

$\mathcal{E}_1: \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2 + (-2)\alpha_1$
$\quad\;\; \alpha_4 \longrightarrow \alpha_4 + (-1)\alpha_1$

$\mathcal{E}_2: \alpha_1 \to \alpha_1 + (-2)\alpha_2$
$\quad\;\; \alpha_3 \to \alpha_3 + (-1)\alpha_2$

$$A \overset{\mathcal{E}_1}{\approx} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{\mathcal{E}_2}{\approx} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathcal{E}_3: \alpha_3 \to -\alpha_3$

$$\approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{\mathcal{E}_4}{\approx} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -17 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

rank $A = 4$